Fluctuations électromagnétiques et modes propres d'un plasma à l'équilibre en régime relativiste

Workshop PNHE : accélération de particules

Charles Ruyer, Laurent Gremillet, Didier Bénisti, Guy Bonnaud

CEA, DAM, DIF
F-91297 Arpajon

Octobre 5, 2012

- Le spectre des fluctuations électromagnétiques d'un plasma à l'équilibre a été peu étudié en régime relativiste.

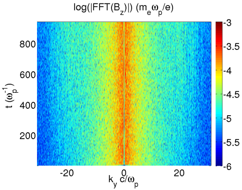


FIGURE: Simulation PIC 1DX 3DV : $B_z^2(k,t)$ (Maxwell-Jüttner : $T = 51.1$keV, $\beta_d = 0.9c$, $e^- e^+$, $\Delta x = \Delta y = 0.1c/\omega_0$)

- Ces fluctuations représentent les germes des instabilités électromagnétiques. Elles sont donc essentielles pour l'étude de son évolution.

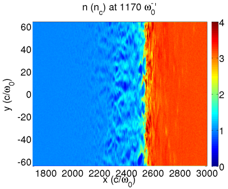
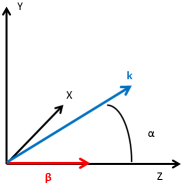


FIGURE: Choc non-collisionnel symétrique d'$e^- e^+$ (Maxwell-Jüttner $T = 5.11$keV, $\beta_d = 0.9c$, $\Delta x = \Delta y = 0.2c/\omega_0$, $\theta = 0.05$)

- Plasma relativiste non-collisionel de température T et vitesse moyenne $\beta_d = v_d/c$.
- Equilibre : distribution de Maxwell-Jüttner [1]

$$
\begin{aligned}
f_s^{(0)}(\mathbf{p}) &= \frac{\mu}{4\pi\gamma_d^2 K_2(\mu/\gamma_d)} \exp\left[-\mu(\gamma - \boldsymbol{\beta}_d \cdot \mathbf{p})\right] \\
\mu &= \frac{mc^2}{T}
\end{aligned}
$$

- Dans le repère du laboratoire :

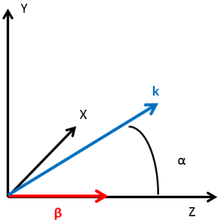


- Le tenseur ϵ :

$$
\epsilon_{\sigma\tau}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\sigma\tau} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \iiint d^3p \left[\frac{p_\sigma}{\gamma}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\tau} + v_\sigma \frac{p_\tau}{\gamma} \frac{\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}\right],
$$

1. Wright, Phys. Rev. A, 12 (1975)

Fluctuations électrostatiques pour $\alpha = 0$



- ϵ_{zz} devient :

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{k^2c^2}(\beta_\phi - \beta_{ds}) \int_{-1}^{1} \frac{f_{\tilde{B}}}{\beta_\phi - \beta} d\beta + \sum_s \frac{\mu_s \omega_{ps}^2}{k^2c^2}.$$

avec $\beta_\phi = \frac{\omega}{kc}$

- Les fluctuations électrostatiques sont, pour un plasma d'électrons-positrons [2] :

$$< E_z E_z^* >_{\mathbf{k},\omega} = \frac{< j_z j_z^* >_{\mathbf{k},\omega}}{\epsilon_0^2 \omega^2 |\epsilon_{zz}|^2} = \frac{-T}{\epsilon_0(\omega - kv_d)} Im \frac{1}{\epsilon_{zz}}.$$

- La relation de dispersion électrostatique devient :

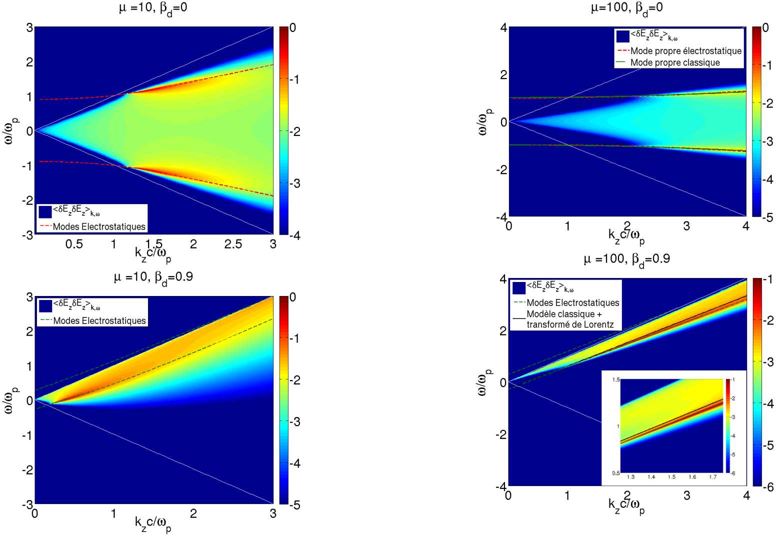
$$k^2c^2 = \sum_s 2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2 (\beta_\phi - \beta_{ds}) \int_{-1}^{1} \frac{f_{\tilde{B}}}{\beta_\phi - \beta} d\beta - \sum_s \mu_s \omega_{ps}^2.$$

- Si $|\beta_\phi| < 1 \Rightarrow Im(\epsilon_{zz}) \neq 0 \Rightarrow < E_z E_z^* >_{\mathbf{k},\omega} > 0$
- Si $|\beta_\phi| > 1 \Rightarrow < E_z E_z^* >_{\mathbf{k},\omega} = 0$ sauf pour $\epsilon_{zz} = 0 \Rightarrow$ Singularité !

2. Sitenko, *Fluctuations and Non-linear Wave Interactions in Plasmas*, (Pergamon Press, 1982)

Fluctuations électrostatiques pour $\alpha = 0$

Spectre $(\mathbf{k}, \omega)$ d'e$^-$e$^+$, normalisé par $m_e^2 c^5 / e^2 \omega_e^2$



- Intégration de $< E_z E_z^* >_{\mathbf{k},\omega}$ sur ω sur $\mathbb{R}$, cas e$^-$e$^+$ [3] :

$$< E_z E_z^* >_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} < E_z E_z^* >_{\mathbf{k},\omega} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$< E_z E_z^* >_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-T}{\epsilon_0(\omega - kv_d)} Im(\frac{1}{\epsilon_{zz}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} Im\Big[I(\omega,k)\Big]$$

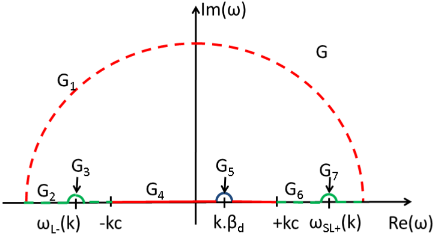


FIGURE: Contour d'intégration dans le plan ω complexe.

$$I(\omega,k) = \frac{-T}{\epsilon_0(\omega - kv_d)}(\frac{1}{\epsilon_{zz}} - 1),$$

avec

$$\begin{cases} \lim_{|\omega| \mapsto +\infty} & I(\omega,k) = 0 \\ \lim_{|\omega| \mapsto +\infty} & (\epsilon_{zz}^{-1} - 1) = 0 \end{cases}$$

Pas de pôles pour $Im(\omega) > 0$: plasma à l'équilibre

$$\sum_{i=1}^{7} Im \int_{G_i} d\omega I(\omega,k) = 0.$$

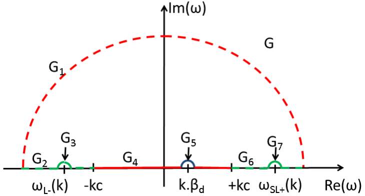
---

3. Langdon, Phys. Fluids, 22 (1979)

Nous obtenons :

$$< E_z E_z^* >_{\mathbf{k}} = < E_z E_z^* >_{\mathbf{k}}^{|v_\phi|<1} + < E_z E_z^* >_{\mathbf{k}}^{|v_\phi|>1}$$

$$< E_z E_z^* >_{\mathbf{k}} = \pi Res(I)_{\omega = k\beta_d}$$



- La contribution des pôles supraluminiques donne :

$$\boxed{\epsilon_0 < E_z E_z^* >_{\mathbf{k}}^{|v_\phi|>1} = \sum_{\omega_{L\pm}^{|v_\phi|>1}} \frac{T}{2\mu(\omega - k\beta_d)} \frac{1}{\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial \omega}|_\omega}.}$$

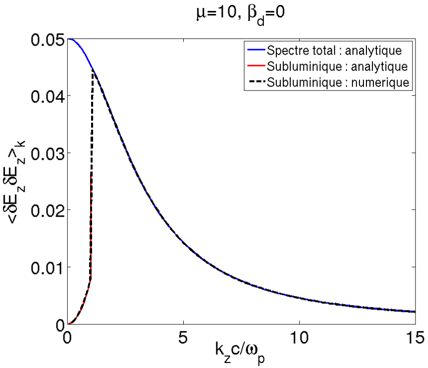
- Les fluctuations électrostatiques spatiales totales correspondent au pôle balistique :

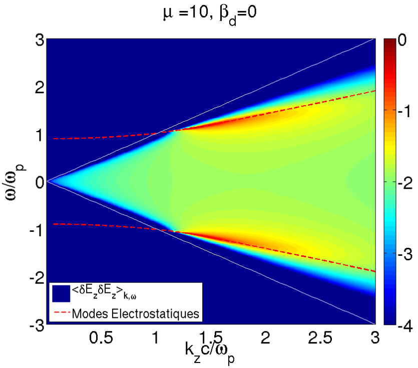
$$\boxed{\epsilon_0 < E_z E_z^* >_{\mathbf{k}} = \pi Res(I)_{\omega = k\beta_d} = \frac{T}{2} \frac{\omega_p^2 \mu}{\omega_p^2 \mu + k^2 c^2}.}$$

$\Rightarrow$ Le spectre des fluctuations longitudinales ne dépend pas de γ_d !

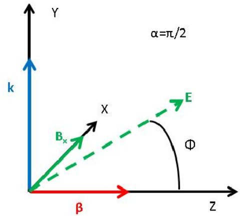
Fluctuations électrostatiques pour $\alpha = 0$

Intégration sur ω, $e^- e^+$, normalisé par $m_e^2 c^5 / e^2 \omega_e$





Fluctuations magnétiques pour $\alpha = \pi/2$



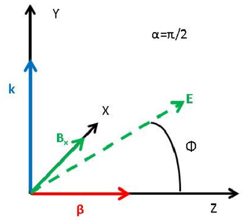
Dans le cadre général, la relation de dispersion peut se mettre sous la forme :

$$k^4c^4(\beta_\phi^2 - 1) - k^2c^2\left[(\beta_\phi^2 - 1)\sum_s 2\pi F_s\mu_s\omega_{ps}^2\frac{B_s(\beta_\phi)}{v_\phi} - \sum_s \mu_s\omega_{ps}^2\beta_{ds}^2 + \sum_s 2\pi F_s\mu_s\omega_{ps}^2 v_\phi A_s(\beta_\phi)\right]$$

$$+\sum_s 2\pi F_s\mu_s\omega_{ps}^2\frac{B_s(\beta_\phi)}{v_\phi}\left(\sum_s 2\pi F_s\mu_s\omega_{ps}^2 v_\phi A_s(\beta_\phi) - \sum_s \mu_s\omega_{ps}^2\beta_{ds}^2\right) - \left(\sum_s 2\pi F_s\mu_s\omega_{ps}^2 C_s(\beta_\phi)\right)^2 = 0.$$

Nous avons ici des modes propres mixtes :

$$\frac{E_y}{E_z} = -\frac{\omega^2\epsilon_{zz} - k^2c^2}{\omega^2\epsilon_{yz}} = -\frac{\omega^2\epsilon_{yz}}{\omega^2\epsilon_{yy}}.$$



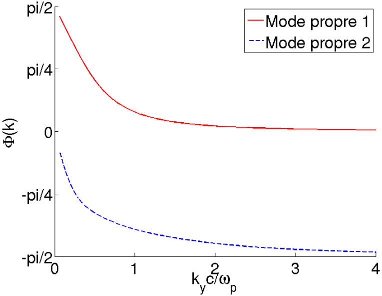


FIGURE: Angle $\Phi(k)$ entre $\mathbf{E}$ et l'axe z pour les deux modes propres les moins amortis.

- Pour un plasma de paires e$^-$e$^+$, nous pouvons écrire :

$$< B_x B_x^* >_{\mathbf{k},\omega} = \frac{-k^2 T}{\epsilon_0 \omega} Im(\frac{\epsilon_{yy}}{D}).$$

avec $D = (\omega^2 \epsilon_{zz} - k_y^2)\epsilon_{yy} - \omega^2 \epsilon_{yz}^2$.

- Le spectre en $\mathbf{k}$ des fluctuations magnétiques correspond au pôle balistique :

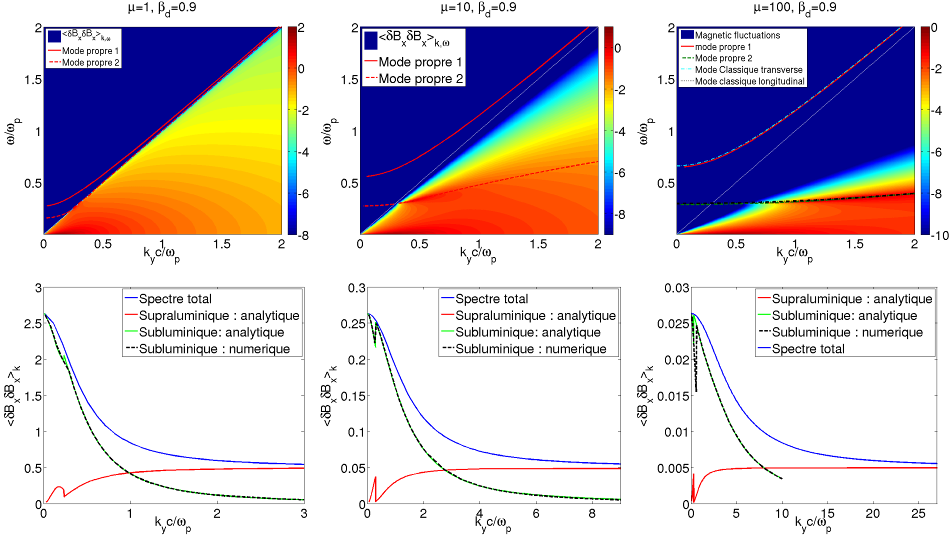
$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} < B_x B_x^* >_{\mathbf{k}} = \frac{T}{2} \frac{k^2 c^2 + \omega_p^2 \mu}{k^2 c^2 + \frac{\omega_p^2 \mu}{\gamma_d^2}}.}$$

- La contribution supraluminique correspond aux pôles supraluminiques :

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} < B_x B_x^* >_{\mathbf{k}}^{|v_\phi|>1} = \sum_{\omega=\omega_{1,2\pm}^{|v_\phi|>1}} \frac{k^2 T}{2\omega} \frac{\epsilon_{yy}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}},}$$

Fluctuations magnétiques pour $\alpha = \pi/2$

Spectre en $(\mathbf{k}, \omega)$, $e^- e^+$, normalisé par $m_e^2 c^3 / e^2 \omega_e^2$

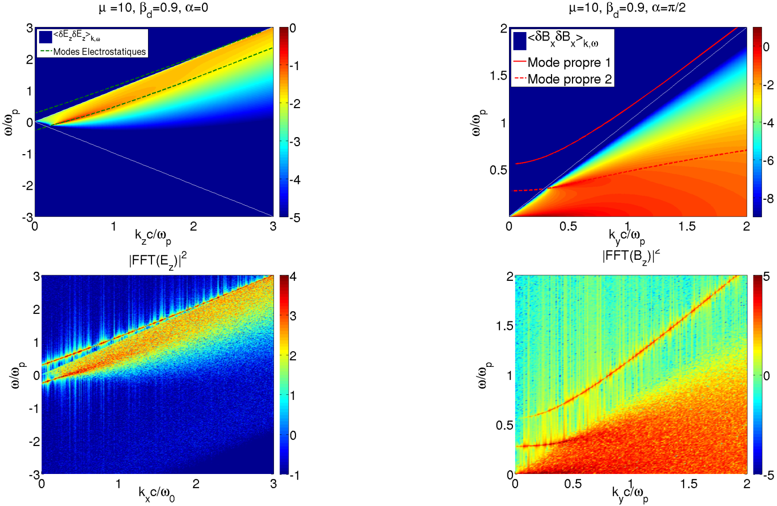


Comparaison PIC (CALDER)

- Simulations 1DX 3DV
- ordre d'interpolation : 1 ou 3
- $L_x = 560$ ou $1120\ c/\omega_p$
- $\Delta_x = 0.1 c/\omega_p$
- $\Delta_t = 0.95 \Delta_x$
- $N_{macro} = 2000$ particules/maille/espèce.

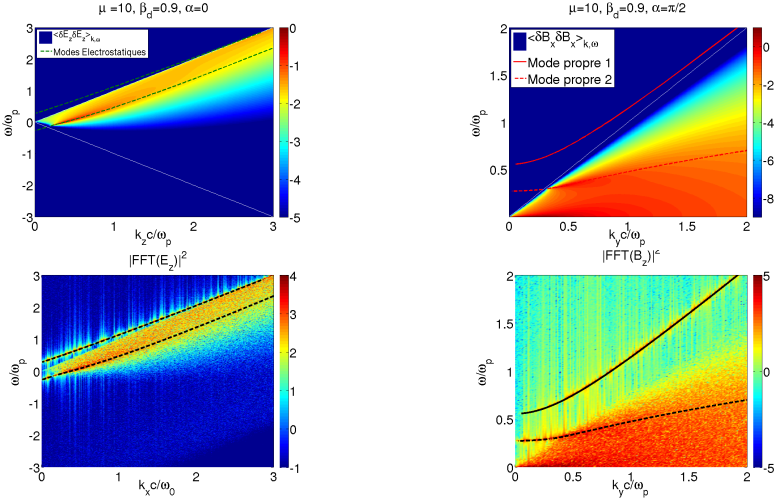
Comparaison aux simulations PIC (CALDER)

Spectres $(\mathbf{k}, \omega)$



Comparaison PIC (CALDER)

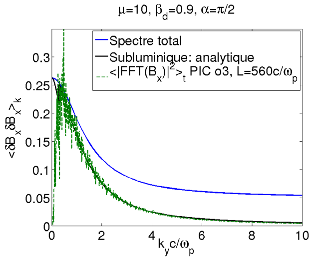
Spectres $(\mathbf{k}, \omega)$



- $<|FFT(B)|^2>_t$ désigne la moyenne temporelle (sur environ $900\omega_p^{-1}$) du carré de la FFT spatiale (normalisé par $\frac{n}{N_{macro}}\frac{L_x}{\Delta_x}$).

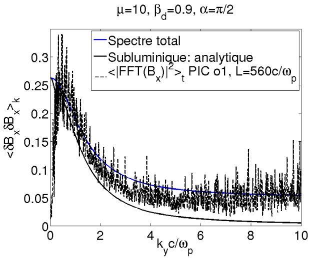
<table>
<tr>
<td>

- Ordre d'interpolation : 3
- $L_x = 560c/\omega_p$



</td>
<td>

- Ordre d'interpolation : 1
- $L_x = 560c/\omega_p$



</td>
</tr>
</table>

$\Rightarrow$ Influence néfaste du filtrage spatial (ordre d'interpolation) sur le spectre des fluctuations.

Conclusion

- Résolution exacte des modes propres longitudinaux et transversaux pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$
- Spectre des fluctuations longitudinales et transversales pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$

$\longrightarrow$ Et pour $0 < \alpha < \pi/2$?

Code PIC

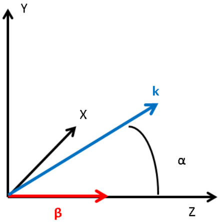
- Les modes propres théoriques sont bien reproduits par des simulations PIC 1DX 3DV.
- Influence de l'ordre d'interpolation sur le spectre des fluctuations.

Pour une instabilité du type Weibel $\omega(k) = +i\Gamma(k)$

$$|B(k,t)|^2 = \Gamma(k) < B_x B_x^* >_{\mathbf{k},\omega=0} e^{2\Gamma(k)t} \; ?$$

Merci pour votre attention

Fluctuations transverses pour $\alpha = 0$



- ϵ_{xx} devient :

$$\epsilon_{xx} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2} (\beta_\phi - \beta_{ds}) \int_{-1}^{1} \frac{f_{A_s}}{\beta_\phi - \beta} d\beta. \quad (1)$$

- Dans le cas d'électrons-positrons :

$$< E_x E_x^* >_{\mathbf{k},\omega} = \frac{-T}{2\pi\epsilon_0(\omega - kv_d)} Im\left(\frac{1}{\epsilon_{xx} - \frac{k^2c^2}{\omega^2}} \right). \quad (2)$$

- Dans le cadre général, la relation de dispersion $\epsilon_{xx} - \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 0$ peut se mettre sous la forme :

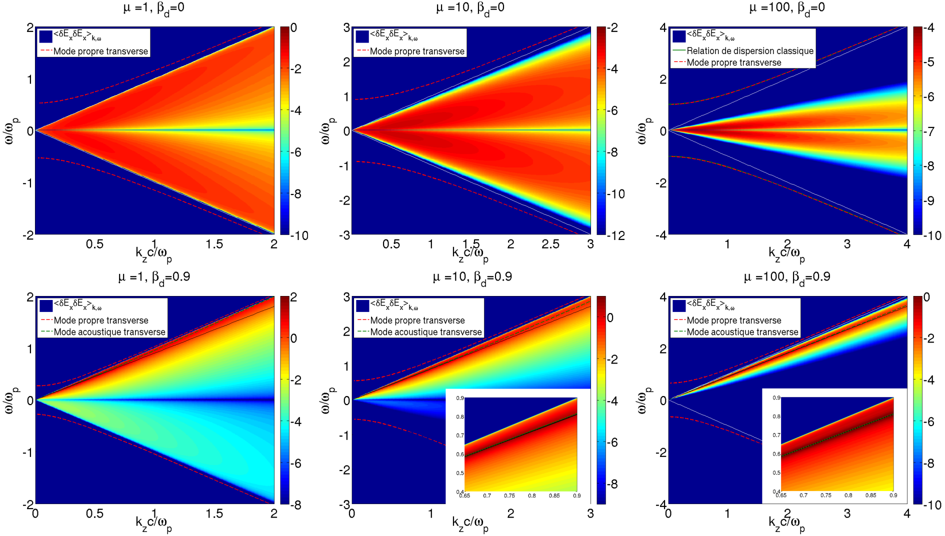
$$k^2c^2 = \frac{1}{\beta_\phi^2 - 1} \sum_s 2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2 (\beta_\phi - \beta_{ds}) \int_{-1}^{1} \frac{f_{A_s}}{\beta_\phi - \beta} d\beta. \quad (3)$$

- Les spectres en $\mathbf{k}$ correspondent aux pôles balistiques :

$$\boxed{\epsilon_0 < E_x E_x^* >_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu_0} < B_y B_y^* >_{\mathbf{k}} = \gamma_d^2 \frac{T}{2}.} \quad (4)$$

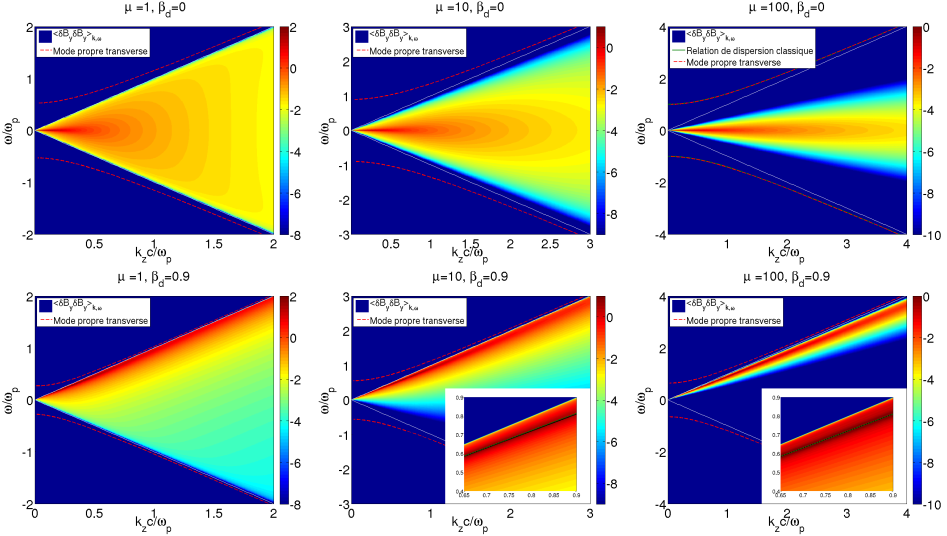
Fluctuations transverses pour $\alpha = 0$

Spectre en $(\mathbf{k}, \omega)$, $e^- e^+$, normalisé par $m_e^2 c^5 / e^2 \omega_e^2$



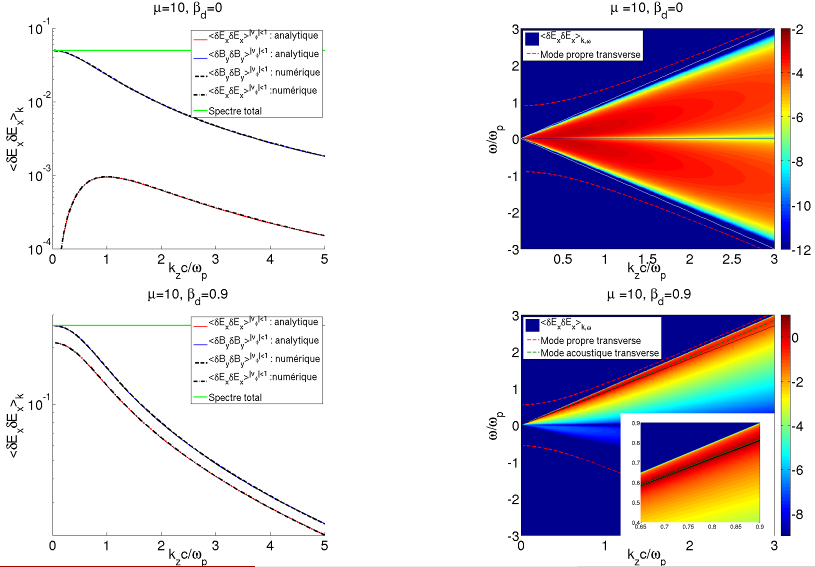
Fluctuations transverses pour $\alpha = 0$

Spectre en $(\mathbf{k}, \omega)$, e^-e^+, normalisé par $m_e^2c^3/e^2\omega_e^2$



Fluctuations transverses pour $\alpha = 0$

Intégration sur ω, $e^- e^+$, normalisé par $m_e^2 c^3 / e^2 \omega_e$



Résultats analytiques

ϵ

$$\epsilon_{xx} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2}(v_\phi - \beta_{ds}\cos(\alpha))D_s \quad (5)$$

$$\epsilon_{yy} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2}(v_\phi - \beta_{ds}\cos(\alpha))\left[\cos^2(\alpha)A_s + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)C_s + \sin^2(\alpha)B_s\right] \quad (6)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2}(v_\phi - \beta_{ds}\cos(\alpha))\left[\sin^2(\alpha)A_s - 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)C_s + \cos^2(\alpha)B_s\right]$$

$$+ \sum_s \frac{\mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2}\beta_{ds}^2 \quad (7)$$

$$\epsilon_{yz} = -\sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2}(v_\phi - \beta_{ds}\cos(\alpha))\left[(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))C_s + \cos(\alpha)\sin(\alpha)(B_s - A_s)\right] \quad (8)$$

Avec $X_s \equiv A_s, B_s, C_s, D_s$:

$$X_s(v_\phi) = \int_{-1}^{1} \frac{f_X(\gamma, \rho_s, \nu_s)}{v_\phi - v} dv$$

$$\rho_s = \mu_s \gamma (1 - \beta_{ds}\cos(\alpha)v)$$

$$\nu_s = \mu_s \beta_{ds} \sin(\alpha)$$

$$[ABCD]_s(v_\phi) = \int_{-1}^{1} \frac{f_{[ABCD]}(\gamma, \rho_s, \nu_s)}{v_\phi - v} dv \tag{9}$$

$$\rho_s = \mu_s \gamma (1 - \beta_{ds} \cos(\alpha) v)$$

$$\nu_s = \mu_s \beta_{ds} \sin(\alpha)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
f_A &= \frac{\gamma e^{-h_s}}{h_s^5} \left[\left[h_s + 1 \right] (\rho_s^2 + 2\nu_s^2) + \nu_s^2 h_s^2 \right] \\
f_B &= \frac{\beta^2 \gamma^3 e^{-h_s}}{h_s^5} \left[\left[h_s + 1 \right] (2\rho_s^2 + \nu_s^2) + \rho_s^2 h_s^2 \right] \\
f_C &= -\nu_s \frac{\beta \gamma^2 \rho_s e^{-h_s}}{h_s^5} \left[3(h_s + 1) + h_s^2 \right] \\
f_D &= \frac{\gamma e^{-h_s}}{h_s^3} \left[h_s + 1 \right],
\end{aligned} \tag{10}$$

avec $h_s = (\rho_s^2 - \nu_s^2)^{1/2}$.

Résultats analytiques

Branches de coupures

$$X = -\int_{-1}^{1} \frac{f_X(v)}{v - v_\phi} dv = -\int_{-1}^{1} \frac{f_X(v) - f_X(v_\phi)}{v - v_\phi} dv - f_X(v_\phi)\ln\left(\frac{v_\phi - 1}{v_\phi + 1}\right) \quad (11)$$

$\Longrightarrow$ *Cette dernière formulation met en évidence les branches de coupures associées au terme en logarithme.*

On définit le domaine de définition du complexe $\zeta = \frac{v_\phi - 1}{v_\phi + 1}$:

- $-\pi/2 < \theta_\zeta < 3\pi/2$

Pour $h(v) = \mu|\beta_d|\gamma\sqrt{(v-\alpha_+)(v-\alpha_-)}$:

- $-\pi/2 < \theta_{v-\alpha_-} < 3\pi/2$
- $-3\pi/2 < \theta_{v-\alpha_+} < \pi/2$

Nous obtenons ainsi les branches de coupures :

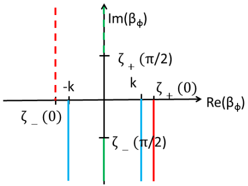


FIGURE:

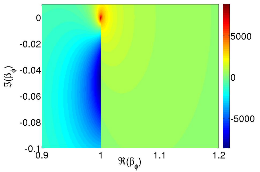


FIGURE: Map in the complex v_ϕ plane of the real part of B for $\mu = 1$, $\beta_d = 0.9$ and $\alpha = 0$

Résultats analytiques

Sources

- La formule générale est :

$$(< jj^{\dagger} >_{\mathbf{k},\omega})_{\alpha\beta} = 2\pi \frac{n_s q_s^2}{k} \int_{\mathbb{R}} v_\alpha v_\beta f_s^{(0)}(\mathbf{p}) \delta(v_\phi - v_z) d\mathbf{p} \quad (12)$$

- Les résultats obtenus sont (Φ est la fonction de Heaviside) :

$$< \mathbf{jj}^{\dagger}_{xx} >_{\mathbf{k},\omega} = \Phi(1 - |v_\phi|)\epsilon_0 \sum_s \frac{(2\pi)^2 F_s m_s \omega_{ps}^2}{k} \left[f_D \right]_{\beta=\beta_\phi} \quad (13)$$

$$< \mathbf{jj}^{\dagger}_{yy} >_{\mathbf{k},\omega} = \Phi(1 - |v_\phi|)\epsilon_0 \sum_s \frac{(2\pi)^2 F_s m_s \omega_{ps}^2}{k} \left[\cos^2(\alpha) f_A + \sin^2(\alpha) f_B + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) f_C \right]_{\beta=\beta_\phi} \quad (14)$$

$$< \mathbf{jj}^{\dagger}_{zz} >_{\mathbf{k},\omega} = \Phi(1 - |v_\phi|)\epsilon_0 \sum_s \frac{(2\pi)^2 m_s F_s \omega_{ps}^2}{k} \left[\sin^2(\alpha) f_A + \cos^2(\alpha) f_B - 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) f_C \right]_{\beta=\beta_\phi} \quad (15)$$

$$< \mathbf{jj}^{\dagger}_{yz} >_{\mathbf{k},\omega} = \Phi(1 - |v_\phi|)\epsilon_0 \sum_s \frac{(2\pi)^2 m_s F_s \omega_{ps}^2}{k} \left[(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) f_C + \cos(\alpha)\sin(\alpha)(f_B - f_A) \right] \quad (16)$$

- Les fluctuations thermiques de E sont données par :

$$< \mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger >_{\mathbf{k},\omega} = \mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega} \cdot < \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger >_{\mathbf{k},\omega} \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega}{}^\dagger \tag{17}$$

avec

$$\mathbf{Z}_{xx} = -i\frac{\omega}{\epsilon_0}\frac{1}{\omega^2\epsilon_{xx} - k^2c^2} \tag{18}$$

$$\mathbf{Z}_{yy} = -i\frac{\omega}{\epsilon_0}\frac{\omega^2\epsilon_{zz} - k_y^2c^2}{(\omega^2\epsilon_{zz} - k_y^2c^2)(\omega^2\epsilon_{yy} - k_z^2c^2) - (\omega^2\epsilon_{zy} + k_yk_zc^2)^2} \tag{19}$$

$$\mathbf{Z}_{yz} = i\frac{\omega}{\epsilon_0}\frac{\omega^2\epsilon_{zy} + k_yk_zc^2}{(\omega^2\epsilon_{zz} - k_y^2c^2)(\omega^2\epsilon_{yy} - k_z^2c^2) - (\omega^2\epsilon_{zy} + k_yk_zc^2)^2} \tag{20}$$

$$\mathbf{Z}_{zz} = -i\frac{\omega}{\epsilon_0}\frac{\omega^2\epsilon_{yy} - k_z^2c^2}{(\omega^2\epsilon_{zz} - k_y^2c^2)(\omega^2\epsilon_{yy} - k_z^2c^2) - (\omega^2\epsilon_{zy} + k_yk_zc^2)^2} \tag{21}$$

- Les relations de dispersion sont données par :

$$\omega^2\epsilon_{xx} - k^2 = 0 \tag{22}$$

$$(\omega^2\epsilon_{zz} - k_y^2)(\omega^2\epsilon_{yy} - k_z^2) - (\omega^2\epsilon_{zy} + k_yk_z)^2 = 0 \tag{23}$$

Le tenseur ϵ devient :

$$\epsilon_{xx} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega k} D_s \tag{24}$$

$$\epsilon_{yy} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega k} B_s \tag{25}$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega k} A_s + \sum_s \frac{\mu_s \omega_{ps}^2}{\omega^2} \beta_{ds}^2 \tag{26}$$

$$\epsilon_{yz} = \sum_s \frac{2\pi F_s \mu_s \omega_{ps}^2}{\omega k} C_s \tag{27}$$

Les termes sources sont :

$$< j_x j_x^* >_{\mathbf{k},\omega} = \frac{T\omega Im(\epsilon_{xx})}{\epsilon_0} \tag{28}$$

$$< j_y j_y^* >_{\mathbf{k},\omega} = \frac{T\omega Im(\epsilon_{yy})}{\epsilon_0} \tag{29}$$

$$< j_z j_z^* >_{\mathbf{k},\omega} = \frac{T\omega Im(\epsilon_{zz})}{\epsilon_0} = \frac{Im(\omega^2 \epsilon_{zz} - k^2 c^2)}{\epsilon_0 \mu \omega} \tag{30}$$

$$< j_y j_z^* >_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{T\omega Im(\epsilon_{yz})}{\epsilon_0} \tag{31}$$

$$f_A = \frac{\gamma e^{-\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}}}{\mu_s^3(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{5}{2}}}\left[\left[\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}+1\right](\gamma^2+2\beta_{ds}^2)+\mu_s^2\beta_{ds}^2(\gamma^2-\beta_{ds}^2)\right] \quad (32)$$

$$f_B = \frac{v^2\gamma^3 e^{-\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}}}{\mu_s^3(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{5}{2}}}\left[\left[\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}+1\right](2\gamma^2+\beta_{ds}^2)+\mu^2\gamma^2(\gamma^2-\beta_{ds}^2)\right] \quad (33)$$

$$f_C = -\beta_{ds}\frac{v\gamma^3 e^{-\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}}}{\mu_s^3(\gamma_d^2-\beta_d^2)^{\frac{5}{2}}}\left[3\left(\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}+1\right)+\mu^2(\gamma^2-\beta_{ds}^2)\right] \quad (34)$$

$$f_D = \gamma\frac{e^{-\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}}}{\mu_s^3(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\mu_s(\gamma^2-\beta_{ds}^2)^{\frac{1}{2}}+1\right] \quad (35)$$

Les relations de dispersion sont :

$$\omega^2\epsilon_{xx}-k^2=0 \quad (36)$$

$$(\omega^2\epsilon_{zz}-k_y^2)\epsilon_{yy}-\omega^2\epsilon_{yz}^2=0 \quad (37)$$