

Poincaré et la relativité :
la logique du *Mémoire* de 1905.

Christian BRACCO

UMR Fizeau, Université de Nice-Sophia Antipolis
SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS

Jean-Pierre PROVOST

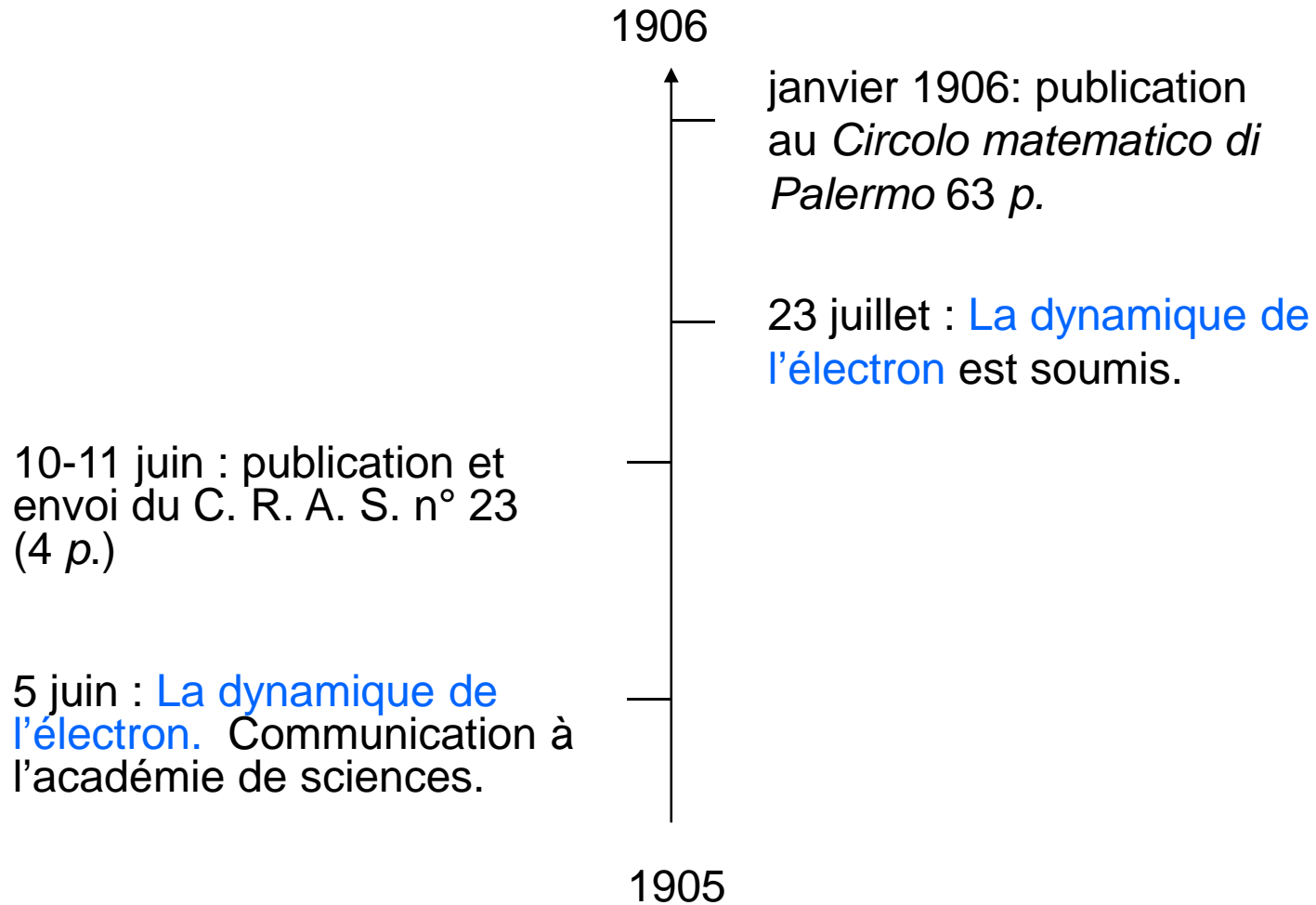
INLN (UNSA)

IAP – Lundi 26 janvier 2009

- De l'électromagnétisme à la mécanique: le rôle de l'action dans le Mémoire de Poincaré de 1905, CB et JPP, *Revue d'Histoire des Sciences* (accepté).
- La théorie de la relativité de Poincaré de 1905 et les Transformations Actives, JPP et CB, *Archive for History of Exact Sciences*, **60**, 337-351
- La relativité de Poincaré de 1905, CB et JPP, *Théorie quantique des champs : Méthodes et applications*, Actes de l'école de physique théorique de Jijel, 2006, Boudjedaa-Makhlouf éditeurs, *Collection Travaux en cours* (Paris : Hermann, 2007), vol. 68, 323-354.
- Poincaré et l'éther relativiste, JPP, CB, GS, *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, **211**, juillet 2005, p.11-36 (suite au journées X-ENS-UPS).



Les publications scientifiques de Poincaré sur *La dynamique de l'électron*



Henri POINCARÉ
1854-1912

C.R. Acad. Sc. du 5 juin 1905.

1. Il semble que cette impossibilité de démontrer le mouvement absolu soit une loi générale de la nature.
2. Le point essentiel, établi par Lorentz, c'est que les équations du champ électromagnétique ne sont pas altérées par une certaine transformation (que j'appellerai du nom de *Lorentz*) et qui est de la forme suivante
(1) $x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$
 x, y, z sont les coordonnées et t le temps avant la transformation, x', y', z' et t' après la transformation. D'ailleurs ε est une constante qui définit la transformation

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

et l est une fonction quelconque de ε .

3. L'ensemble de toutes ces transformations, joint à l'ensemble de toutes les rotations de l'espace, doit former un groupe; mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que $l = 1$; on est donc conduit à supposer $l = 1$ et c'est là une conséquence que Lorentz avait obtenue par une autre voie.

Soient ρ la densité électrique de l'électron, ξ, η, ζ sa vitesse avant la transformation; on aura pour les mêmes quantités $\rho', \xi', \eta', \zeta'$ après la transformation

$$(2) \quad \rho' = \frac{k}{l^3} \rho (1 + \varepsilon \xi), \quad \rho' \xi' = \frac{k}{l^3} \rho (\xi + \varepsilon), \quad \rho' \eta' = \frac{\rho \eta}{l^3}, \quad \rho' \zeta' = \frac{\rho \zeta}{l^3}.$$

5. Poincaré annonce ensuite comment mettre en conformité des modèles d'électrons avec les équations de Hamilton et $l=1$. Application à la gravitation.

Trois clés pour comprendre le *Mémoire de Palerme*

- Travaux de Lorentz (1892, 1895, 1899, 1904) : mises en mouvement (*Transformations Actives*). Poincaré géomètre *corrige Lorentz*. **CINÉMATIQUE.**
- Lettres à Lorentz (Mai 1905). De la condition $l=1$ de Lorentz à l'idée de *groupe*.
- Principe de moindre action et *invariance relativiste de l'action* (au-delà de tout modèle). **DYNAMIQUE.**

La dynamique de l'électron

(février 1906, 23 juillet 1905, février 1906, 5 juin 1905)

Introduction

1. Transformation de Lorentz
2. Principe de moindre action
3. TL et PMA
4. Groupe de Lorentz
5. Ondes de Langevin
6. Contraction des électrons
7. Mouvement quasi-stationnaire
8. Mouvement quelconque
9. Hypothèses sur la gravitation

**TL et invariance
de l'elm**

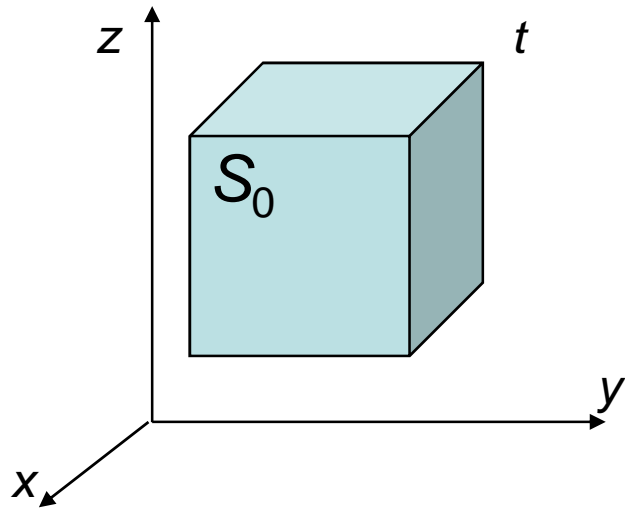
**Invariance de
l'action et
dynamique
relativiste**

**Groupe et
géométrie**

**Contraction
de Lorentz et
pression de
Poincaré**

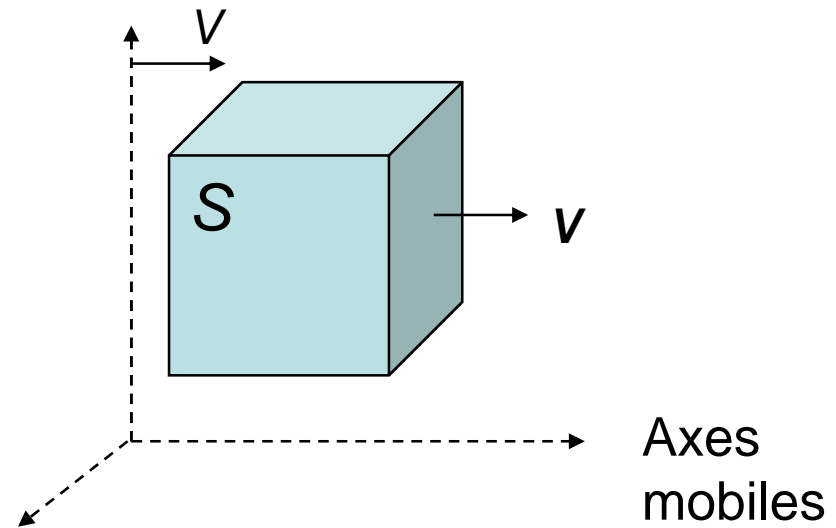
Poincaré géomètre corrige Lorentz
et introduit la condition de groupe.
(§1 et 4 du Mémoire).

Lorentz 1895 : « Les états correspondants »



« Repos » dans l'éther

$\mathbf{v}_0, \rho_0(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \dots$



1) « Mouvement global »

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \rho = \rho_0$ (Boost galiléen)

$\mathbf{E}, \mathbf{B} \dots ?$

2) Ramener l'électromagnétisme de S à celui de S_0 par un changement de variables $x', y', z', t', \mathbf{E}', \mathbf{B}' \dots$

... pour avoir la même forme des équations de Maxwell (v/c) et justifier l'impossibilité de détecter le mouvement de la Terre:

$$x' = x - Vt$$

$$t' = t - \boxed{Vx} \quad t' : \text{temps local}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \boxed{\mathbf{V} \wedge \mathbf{E}}$$

!! On n'a pas changé de référentiel, mais de variables.

« ... simples grandeurs auxiliaires dont l'introduction n'est qu'un artifice mathématique ... » (Lorentz 1921).

Signification physique : défaut de synchronisation pour des observateurs en mouvement (Poincaré 1900). Ce n'est plus la problématique de Poincaré en 1905.

Lorentz 1904

Nouveau changement de variables (tout ordre) :

$$\begin{aligned}x' &= \gamma l (x) \\t' &= \frac{l}{\gamma} t - \gamma l \frac{v}{c^2} (x) \\(x) &= (x - vt) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\end{aligned}$$

... seulement 3 équations de Maxwell/4 invariantes. Pourquoi?

Le changement de variables lorentzien ne compense pas le boost galiléen initial $v=v_0+V$, $\rho=\rho_0$ faisant passer de S_0 à S

Postulat de Relativité. Poincaré. Introduction du Mémoire.

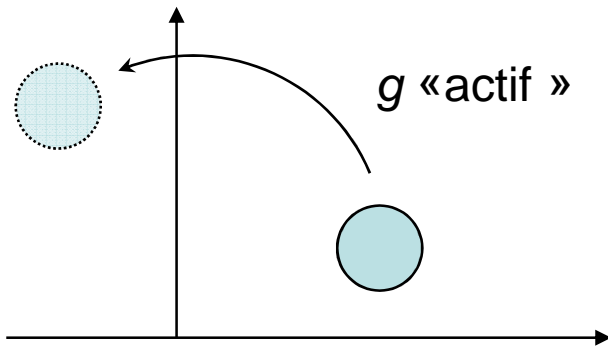
*Il semble que cette impossibilité de mettre en évidence expérimentalement le mouvement absolu de la Terre soit une loi générale de la Nature ; nous sommes naturellement portés à admettre cette loi, que nous appellerons **Postulat de Relativité** et à l'admettre sans restriction.*

N'oublions pas ... Poincaré géomètre

- Programme d'Erlangen (Klein 1872):

Géométrie = Espace + Groupe de transformations

Propriété géométrique = invariante par les transformations



point $\bar{x} \rightarrow \bar{x}' = g\bar{x}$

courbe $C \xrightarrow{g} \text{courbe } C'$

$f(\bar{x}) = 0$ équation de C $f(g^{-1}\bar{x}') = 0$ équation de C'

dans le même système de coordonnées

- « *Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « groupe » particulier ; mais le concept de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance* » La science et l'hypothèse 1902.

Groupe plus fondamental pour Poincaré que les coordonnées (caractère conventionnel), travaux sur la géométrie de Lobatchevski (différentes représentations euclidiennes), réflexions philosophiques

Poincaré 1905. §1. Mémoire de Palerme

« Les équations [Maxwell] sont susceptibles d'une transformation remarquable découverte par Lorentz, et que nous appellerons « transformations de Lorentz », et qui doit son intérêt à ce qu'elle explique pourquoi aucune expérience n'est susceptible de nous faire connaître le mouvement absolu de l'Univers. »

$$\begin{aligned}x' &= l\gamma(x + \varepsilon t) \\t' &= l\gamma(t + \varepsilon x) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\end{aligned}$$

$$c=1$$

l dilatation, ($l=1$ §4)

ε vitesse, paramètre de la transformation

!! Transformations actives **CLÉ 1.**

Poincaré ne parle jamais de changement de référentiel

$$X = V_0 t \xrightarrow{\text{Boost}} X' = \frac{V_0 + \varepsilon}{1 + V_0 \varepsilon} t'$$

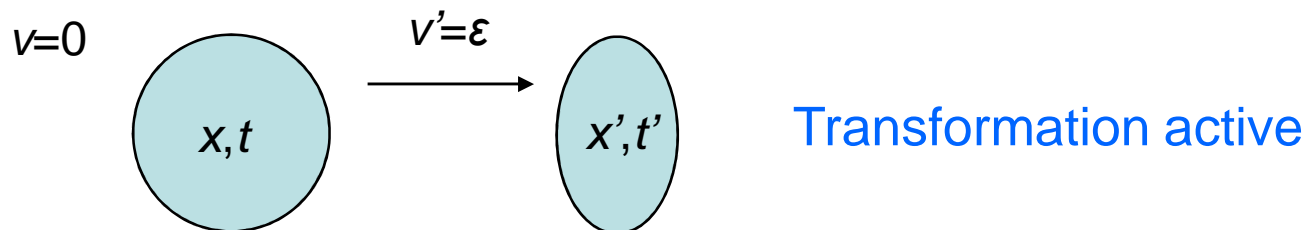
Poincaré commence par une **étude cinématique** :

« *sphère entraînée avec l'électron dans un mouvement de translation uniforme* »

$$(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2 = r^2$$

« *la transformation la changera en un ellipsoïde [son image]* »

$$\gamma^2(x' - \varepsilon t' - v_x t' + \varepsilon v_x x')^2 + (y' - v_y \gamma t' + v_y \gamma \varepsilon x')^2 + (z' - v_z \gamma t' + v_z \gamma \varepsilon x')^2 = (lr)^2$$



L'invariance de la charge conduit à :

$$\rho' = \frac{\gamma}{l^3} \rho (1 + v_x \varepsilon)$$

De la loi de transformation des vitesses Poincaré déduit pour la densité de courant $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$

$$j_x' = \frac{\gamma}{l^3} (j_x + \varepsilon \rho) \quad j_y' = \frac{1}{l^3} j_y \quad j_z' = \frac{1}{l^3} j_z$$

Invariance complète de l'électromagnétisme :

Poincaré obtient les lois de transformation de A , V , E , B , F , et même f

Vitesses

$$V_x' = \frac{V_x + \varepsilon}{1 + V_x \varepsilon} \quad V_y' = \frac{V_y}{\gamma(1 + V_x \varepsilon)} \quad V_z' = \frac{V_z}{\gamma(1 + V_x \varepsilon)}$$

Potentiels

$$V' = \frac{k}{l}(V + \varepsilon A_x) \quad A_x' = \frac{k}{l}(V + \varepsilon A_x) \quad A_y' = \frac{A_y}{l} \quad A_z' = \frac{A_z}{l}$$

Champs

$$E'_x = \frac{1}{l^2} E_x \quad B'_x = \frac{1}{l^2} B_x$$
$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\gamma}{l^2} (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}_{\perp}) \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\gamma}{l^2} (\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{V} \wedge \mathbf{E}_{\perp})$$

Forces volumiques

$$F_x' = \frac{\gamma}{l^5} (F_x + \varepsilon \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \quad F_y' = \frac{F_y}{l^5} \quad F_z' = \frac{F_z}{l^5}$$

+ forces

$$\left(f \propto F / \rho \right)$$

(+ loi de transfo par rapport aux dilatations)

TL, groupe (§4) ...

- Étude du groupe complet et de son algèbre de Lie.
- Poincaré fait remarquer que les TL du §1 avec $l(\varepsilon)$ ne forment un groupe que si $l=1$ (appelée plus loin condition de Lorentz). CLÉ 2.

... et géométrie.

- « $x, y, z, t\sqrt{-1}$ coordonnées [d'un point] dans l'espace à quatre dimensions ...la TL n'est qu'une rotation de cet espace autour de l'origine, regardée comme fixe ». Cette « transformation linéaire qui n'altère pas la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ » (invariant).
- + quadrvecteurs et autres invariants (gravitation qui se propage à la vitesse c).

(T. Damour (2008) *What is missing from Minkowski's « Raum und Zeit » lectures* Ann. Phys. (Berlin) 1-12).

PMA, invariance de l'action

... et modèles d'électron. §2,3,6,7,8. Mémoire.

Un petit historique ...

- Une affaire de **Mécanique et d'Optique géométrique** :
Leibniz, Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton Jacobi
...et de **mathématiques**.

$$S = \int L(q, \dot{q}; t) dt = \int (T - U) dt$$

- **PMA et systèmes complexes** (après Maxwell 1865) :
(Thomson, Larmor, Boltzmann ...)

Helmholtz :

- **Second principe** et PMA, variables cycliques...
- variation de S avec **p, q indépendants** (1884-1887)

$$\delta_{p,q} S = \delta \int (p\dot{q} - H) dt = 0$$

- **électromagnétisme** (1892-1894)

Poincaré et le PMA

- Le second principe de la thermo ne se réduit pas au PMA (1889)
- expose la théorie de Lorentz avec le PMA (1899)
- *Mécanique Céleste* ... (1899, 1905), [forme hamiltonienne](#) (§XXIX)
- « *Un des grands principes de la physique* », [au-delà de tout modèle mécanique](#) (*Électricité et Optique*, 1899) ... qui en particulier résiste à la réduction des variables.

Action de Poincaré : quelles origines?

Poincaré pose sans explication au §2 :

$$S = S_{em} + S_{int} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] \quad (\text{div} \mathbf{E} = \rho)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \quad \text{courant de Lorentz}$$

(déplacement + conduction)

- Chez Helmholtz $\mathbf{j} = \left[\frac{d\mathbf{E}}{dt} \right] = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{E} + \text{rot} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{v})$

Interprété comme courant de conduction par Poincaré

Courant de Röntgen qui a préoccupé Poincaré (1899)

Vitesse d'entraînement total de l'éther

- S est aussi la forme hamiltonienne de l'action (moderne) de Schwarzschild (1903)

Réduction des variables.

- Équations de Maxwell

$$S = S_{em} + S_{int} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right]$$

avec la condition $\text{div} \mathbf{E} = \rho$

$\delta_{A,E} S = 0 \Rightarrow$ équations de Maxwell manquantes

- L'action devient
$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \frac{(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)}{2}$$
 fonction des charges (matière)
ARQS Passage à la mécanique

$$\delta S = \int \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} d^3r dt \Rightarrow \text{force volumique de Lorentz}$$

Au §6 Poincaré calculera S pour un système constitué d'un électron étendu.

Invariance relativiste de l'action.

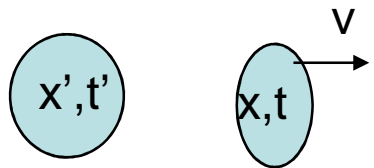
- §3. « Voyons si le principe de moindre action nous donne la raison du succès des transformations de Lorentz »

Les relations $B'^2 - E'^2 = \frac{1}{l^4}(B^2 - E^2)$ et $d^3\mathbf{r}'dt' = l^4 d^3\mathbf{r}dt$ conduisent à :

$$\boxed{S = S'}$$
 (quelque soit l)

Poincaré retrouve la loi de transformation des forces.

- §6. **remarque très importante** de Poincaré avant la discussion des modèles concernant le lagrangien d'un électron en mouvement caractérisé par ses seules variables de position :



$$S = \int dt \left[\int dx dy dz (.) \right] = \int L dt = S' = \int L' dt'$$

$$dx' = 0 \text{ (repos)} \Rightarrow dt' = \frac{l}{\gamma} dt \Rightarrow L = \frac{l}{\gamma} L'$$

- §8. Invariance de S_1 (associée au terme supplémentaire dans le lagrangien, non électromagnétique).

- Indépendamment de tout modèle, Poincaré sait alors que si ($l=1$) :

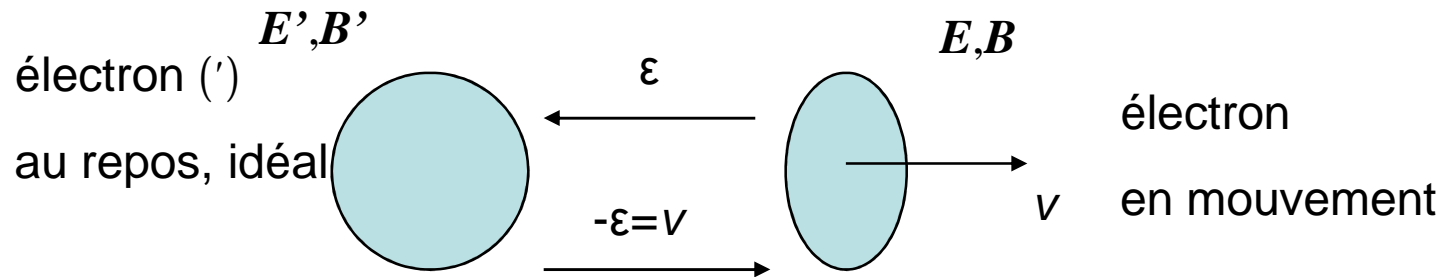
$$\boxed{L(\mathbf{v}) = -A\sqrt{1-v^2}} \quad (\text{Poincaré fera } A=1!)$$

- §7. Équation de la dynamique relativiste (obtenue après vérification de l'existence d'un modèle satisfaisant le postulat de relativité ($l=1$))

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \boxed{\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma^3 \mathbf{v} \frac{dv}{dt}}$$

- Poincaré vérifie explicitement que les deux membres se transforment de la même façon et montre qu'il n'y a pas d'autre équation, ni d'autre dépendance $l(\varepsilon)$ qui satisfasse l'invariance. Généralise l'approche de Lorentz (qui étudie l'invariance de $m d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E}$ pour obtenir $l=1$).
- Première obtention du lagrangien relativiste, avant Planck (qui de plus lui rajoute une constante ...) *Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Physik*, 23 März 1906.

Modèles d'électrons et pression de Poincaré. §6.



« Supposons un électron unique animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme ... on peut, grâce à la [TL], ramener l'étude du champ déterminé par cet électron au cas où l'électron serait immobile ... »:

$$E_x = l^2 E'_x, \quad E_{\perp} = \gamma l^2 E'_{\perp} \quad ; \quad B_x = B'_x = 0, \quad B_{\perp} = v \wedge E'_{\perp}$$

Poincaré intègre dans l'espace l'énergie $(E^2 + B^2)/2$, la quantité de mouvement $E \wedge B$ et le lagrangien $(B^2 - E^2)/2$; tout est fonction de l'énergie électrostatique au repos W' :

$$W = W' \gamma l (3 + v^2), \quad P_x = \frac{4}{3} \gamma l W', \quad L = -\frac{l}{\gamma} W' = \frac{l}{\gamma} L'$$

Surprise: $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}$ est vérifiée pour $l = \gamma^{-1/3}$ (modèle de Langevin: contraction accompagnée d'une dilatation transverse qui conserve le volume) mais pas pour $l=1$ (groupe de Lorentz).

Lettres à Lorentz en mai 1905.

1^{ère} lettre (les problèmes):

Vous supposez $\ell = 1$.

Langevin suppose $k\ell^3 = 1$.

J'ai essayé $k\ell = 1$ pour conserver l'unité de temps, mais cela m'a conduit à des conséquences inadmissibles.⁵

D'un autre côté j'arrive à des contradictions (entre les formules de l'action et de l'énergie) avec toutes les hypothèses autres que celles de Langevin.⁶

Le raisonnement par lequel vous établissez que $\ell = 1$ ne me paraît pas concluant, ou

2^{ème} lettre : (le groupe)

Je trouve comme vous $\ell = 1$ par une autre voie.

3^{ème} lettre : (la pression)

$\ell = 1$. Seulement pour que cette hypothèse soit admissible, il faut admettre que chaque électron est soumis à des forces complémentaires dont le travail est proportionnel aux variations de son volume.

Poincaré montre que :

- le problème est lié à la stabilité de l'électron. Il envisage que l'électron en mouvement a des axes quelconques $r, \theta r, \theta r$.
- si la stabilité est assurée par une liaison $r = b\theta^m$, ce n'est possible que si $l = \gamma^{-1/3}$
- si elle est assurée par un **potentiel supplémentaire** en puissances de r et θ , ce potentiel doit être proportionnel à $r^3 \theta^2$ (volume de l'électron) si on veut $l=1$.

Vérifions simplement qu'un lagrangien du type

$$L_p(\mathbf{v}, r') = -W'(r')\sqrt{1-\mathbf{v}^2} - ar'^3 \sqrt{1-\mathbf{v}^2}$$

assure à la fois la **stabilité** de l'électron (pression de Poincaré) et

l'invariance des équations de Hamilton :

$$W' = \frac{cste}{r'}, \quad \frac{\partial L_p}{\partial r'} = 0 \Rightarrow L_p = -\frac{4}{3}W'\sqrt{1-\mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{v}}$$

- **La contraction est un effet des TL.** « *Les transformations qui n'altèrent pas les équations du mouvement doivent former un groupe, et cela ne peut avoir lieu que si $l=1$. Comme nous ne devons pas pouvoir reconnaître si un électron est au repos ou en mouvement absolu, il faut que, quand il est en mouvement, il subisse une déformation qui doit être précisément celle que lui impose la déformation correspondante du groupe* ».
- **Pression de Poincaré.**

« *On retrouve donc l'hypothèse de Lorentz à condition d'ajouter un **potentiel supplémentaire proportionnel au volume** de l'électron* »

« *Ces forces qui engendrent le potentiel ... peuvent évidemment être assimilées à une **pression** [négative] qui règnerait à l'intérieur de l'électron* »

Une pression retrouvée récemment (mécanisme de **confinement** des quarks) : « *Comme le vide physique [l'éther?] est l'état fondamental, la formation d'une « bulle » de vide perturbatif dans le cadre de QCD coûte de l'énergie. Cette énergie E_V est proportionnelle au volume, et si on forme une bulle sphérique, on aura $E_V = 4\pi r^3 B/3$ où B est [...] la « constante du bag »* »

- **Quelle masse?** Energie W' ou $4W'/3$? i.e. l'énergie associée au potentiel supplémentaire doit-elle être prise en compte (toute forme d'énergie contribuerait à la masse). Poincaré se limite à discuter la **masse électromagnétique** W' des physiciens. Statut de l'énergie interne éclairci par Planck et Einstein en 1907-1908.

Conclusions:

- Si on cherche:

des changements de référentiels, un rejet explicite de l'éther, une relativité du temps, une problématique de la mesure ...

on ne les trouve pas et on conclut que Poincaré aurait maîtrisé les mathématiques de la relativité mais pas la physique.

Poincaré utilise des transformations actives, les objets en mouvement se contractent réellement et l'action (masse unité) joue le rôle de temps propre ($S=m\tau$).

- Le rôle du PMA dans le *Mémoire de Palerme* est finalement de transférer dans le domaine de la mécanique la nouvelle symétrie découverte avec l'électromagnétisme (TL avec l qcq); ce transfert se fait par l'invariance $S=S'$ assortie de la condition $l=1$ (non invariance de la mécanique par des dilatations).
- Le modèle de Lorentz, corrigé par la pression (non électromagnétique) de Poincaré pour satisfaire la condition de groupe $l=1$ (postulat de relativité), joue finalement le rôle de théorème d'existence.

Poincaré et l'Enseignement de la Mécanique relativiste :

Qu'on me permette un vœu, pour terminer. Supposons que, d'ici quelques années, ces théories subissent de nouvelles épreuves et qu'elles en triomphent ; notre enseignement secondaire courra alors un grand danger : quelques professeurs voudront, sans doute, faire une place aux nouvelles théories. Les nouveautés sont si attrayantes, et il est si dur de ne pas sembler assez avancé ! Au moins, on voudra ouvrir aux enfants des aperçus et, avant de leur enseigner la mécanique ordinaire, on les avertira qu'elle a fait son temps et qu'elle était bonne tout au plus pour cette vieille ganache de Laplace. Et alors, ils ne prendront pas l'habitude de la Mécanique ordinaire.

Est-il bon de les avertir qu'elle n'est qu'approchée ? Oui ; mais plus tard, quand ils s'en seront pénétrés jusqu'aux moelles, quand ils auront pris le pli de ne penser que par elle, quand ils ne risqueront plus de la désapprendre, alors on pourra, sans inconvénient, leur en montrer les limites.

C'est avec la Mécanique ordinaire qu'ils doivent vivre ; c'est la seule qu'ils auront jamais à appliquer ; quelque soient les progrès de l'automobilisme, nos voitures n'atteindront jamais les vitesses où elle n'est plus vraie. L'autre n'est qu'un luxe, et l'on ne doit penser au luxe que quand il ne risque plus de nuire au nécessaire.

III 3 Science et Méthode 1908 p.142.

L'enseignement de la physique (secondaire et Classes Prépas) a (malheureusement?) donné raison à Poincaré.

Les anciennes lois de la dynamique n'en restent pas moins pratiquement vraies pour le monde qui nous entoure. Mais ne pourrait-on pas dire avec quelque apparence de raison que par suite de la dissipation constante de l'énergie, les vitesses des corps on dû tendre à diminuer, puisque leur force vive tendait à se transformer en chaleur ; qu'en remontant assez loin dans le passé, on trouverait une époque où les vitesses comparables à celles de la lumière n'étaient pas exceptionnelles, où par suite les lois classiques de la dynamique n'étaient pas encore vraies ?

§3 DP 62-63. Conférence de Bologne 6-11 avril 1911, congrès international de philosophie (lue par Borel).